



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Forelæsningsnoter om Vind og Vindbelastning

Brorsen, Michael

*Publication date:*  
1997

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Brorsen, M. (1997). *Forelæsningsnoter om Vind og Vindbelastning*. Institut for Vand, Jord og Miljøteknik, Aalborg Universitet.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Forelæsningsnoter om  
**Vind og vindbelastning.**

Michael Brorsen

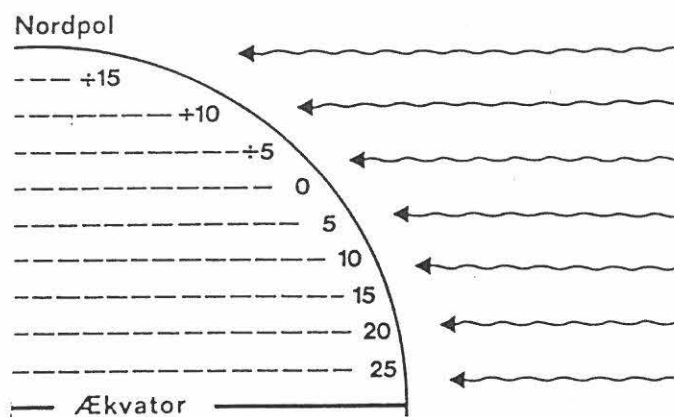
Februar 1997  
Institut for Vand, Jord og Miljøteknik.  
Aalborg Universitet  
Sohngårdsholmsvej 57  
9000 Aalborg



# Indholdsfortegnelse

1	Beskrivelse af vind	1
1.1	Årsagen til vind . . . . .	1
1.2	Coriolis' kraft . . . . .	2
1.3	Vejrkort . . . . .	5
1.4	Geostrofisk vind . . . . .	7
1.5	Vind i grænselag . . . . .	10
1.5.1	Vindprofil . . . . .	10
1.5.2	Vindspektrum . . . . .	13
1.5.3	Fordeling af geostrofisk vindhastighed, $U_G$ . . . . .	15
1.5.4	Fordeling af vindhastighed, $v$ . . . . .	16
2	Vindbelastning	17
2.1	Statisk vindlast i vindens retning . . . . .	18
2.2	Dynamisk vindlast i vindens retning . . . . .	18
3	Litteratur	23





Figur 1: Solindstråling ved jævndøgn.

## 1 Beskrivelse af vind

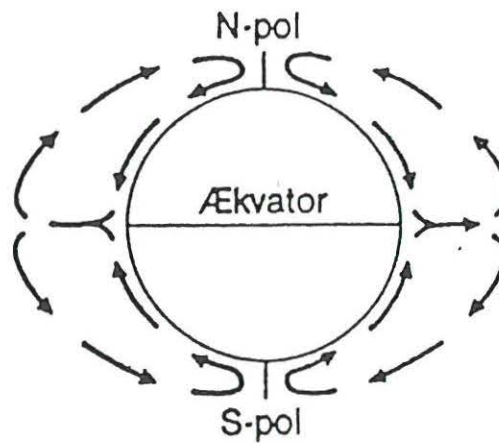
Formålet med disse noter er at give en indledende beskrivelse af vind, dvs. strømninger af luften i Jordens atmosfære, samt de belastninger som vinden forårsager på konstruktioner.

Først beskrives årsagerne til dannelsen af vind, samspillet mellem vind og jordens overflade samt vindens stokastiske natur. Dernæst beskrives samspillet mellem vind og konstruktioner. Det vises ved simple eksempler, at fastlæggelsen af vindbelastning i en given vindsituation i høj grad afhænger af samspillet mellem konstruktion og vind.

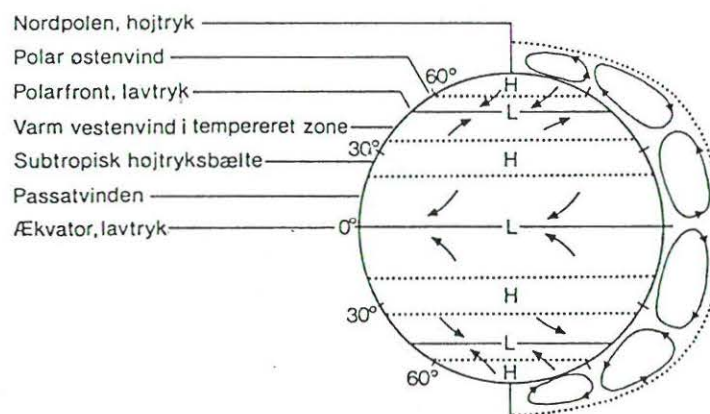
### 1.1 Årsagen til vind

Som alle ved, er vindforholdene i atmosfæren på denne klode særdeles vanskelige at beskrive i detaljer. En vis indsigt kan dog opnås med nogle simple betragtninger. Den drivende kraft i genereringen af vind er geografiske forskelle i Solens opvarmning af jordoverfladen. Solindstrålingen pr. arealenhed er simpelthen større ved ækvator end ved polerne. Se figur 1. Hvis Jorden ikke roterede ville opvarmningen af luften ved ækvator skabe en opdrift, som ville få luften til at stige til vejrs. Da kontinuitetsligningen også gælder for luft, ville der strømme luft mod ækvator, og resulterende ville man finde en strømning som vist på figur 2. Imidlertid optræder denne simple strømning ikke i praksis, hvilket skyldes Jordens rotation. Normalt beskrives strømningen i et koordinatsystem, der er fastlåst til Jorden, dvs. roterer. Set fra dette koordinatsystem vil man på den nordlige halvkugle opleve, at partikelbanerne afbøjes mod højre, når man ser i bevægelsens retning. Denne afbøjning beskrives ved indførelsen af den fiktive *Coriolis' kraft*.

Vinden, der i stor højde blæser mod nord, afbøjes derfor mod øst, og efter nogen tid er den afkølet så meget, at den synker nedad. Herved dannes den sydligste celle i strømningen vist på figur 3. Da kold luft strømmer langs jordoverfladen fra nordpolen



Figur 2: Strømning i atmosfæren, hvis Jorden ikke roterede.



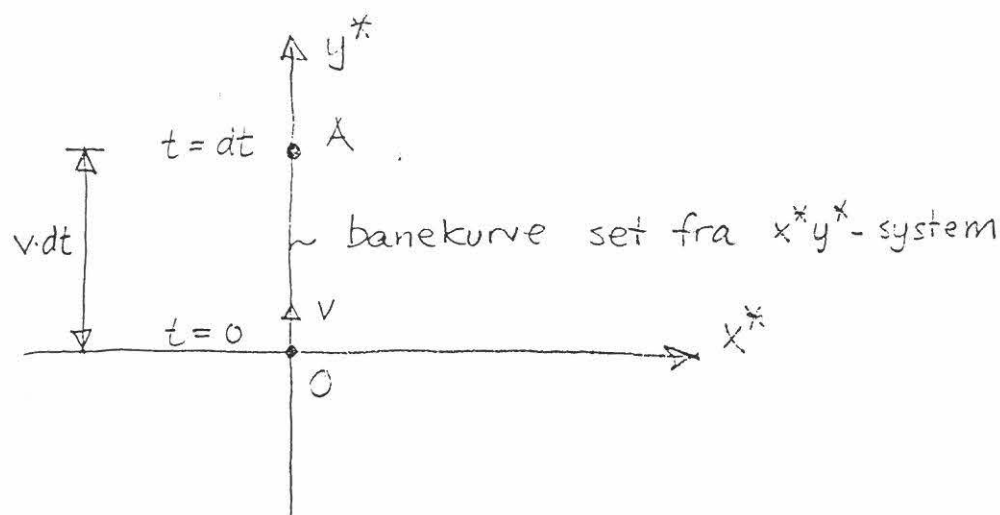
Figur 3: Skematisk fremstilling af aktuel strømning i atmosfæren.

mod syd, kunne man godt forestille sig, at dette kun ville bevirke dannelsen af yderligere en celle. Imidlertid ville dette give strømninger i modsatte retninger dér, hvor de to celler mødtes. Istedet dannes der en tredje celle således, at 'kabalen' går op. Se figur 3. Tilsvarende dannes 3 celler på den sydlige halvkugle, hvor afbøjningen af vinden dog sker mod venstre.

## 1.2 Coriolis' kraft

Coriolis' kraft er den fiktive ydre kraft, som vi må indføre, hvis bevægelse set fra et roterende koordinatsystem skal beskrives korrekt med anvendelse af Newtons 2. lov. At det er nødvendigt at indføre Coriolis' kraft, kan indses ved følgende betragtninger.

En partikel tænkes at bevæge sig med konstant hastighed  $\vec{v}$  langs en retlinet banekurve set fra  $x^*y^*$ -systemet, der ligger stille i forhold til universet. Partiklen er således ikke påvirket af ydre kræfter, jfr. Newtons 2. lov.



Figur 4: Bevægelse i  $x^*y^*$ -system.

Befinder partiklen sig i origo  $O$  til tiden  $t = 0$  bevægende sig i  $y^*$ -aksens retning, vil den til tiden  $t = dt$  have bevæget sig stykket  $v dt$  ud ad  $y^*$ -aksen til punkt  $A$ . Se figur 4. Dernæst vil vi se på partiklens bevægelse betragtet fra et  $xy$ -system, der roterer med vinkelhastigheden  $\vec{\omega}$ . Set fra  $xy$ -systemet, vil  $x^*y^*$ -systemet have drejet vinklen  $\omega dt$  med uret i løbet af tidsrummet  $dt$ , og i dette tidsrum har partiklen som nævnt bevæget sig fra punkt  $O$  til punkt  $A$ .

Set fra det roterende koordinatsystem, bevæger partiklen sig derfor ud ad  $y$ -aksen til  $t = 0$ , hvorefter banekurven afbojes mod højre, så partiklen havner i punkt  $A$  til tiden  $dt$ . Banekurven bliver altså krum, selvom der ikke er nogle ydre kræfter på partiklen. Se figur 5. For at få Newtons 2. lov til at passe, når bevægelsen beskrives i det roterende koordinatsystem, må man derfor indføre den fiktive Coriolis' kraft, der skal være rettet mod højre, når man ser i bevægelsens retning.

Som vist i f. eks. Meriam and Kraige (1987), findes Coriolis' kraft,  $\vec{F}_C$ , af følgende udtryk:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1)$$

hvor  $m$  er partiklens masse.

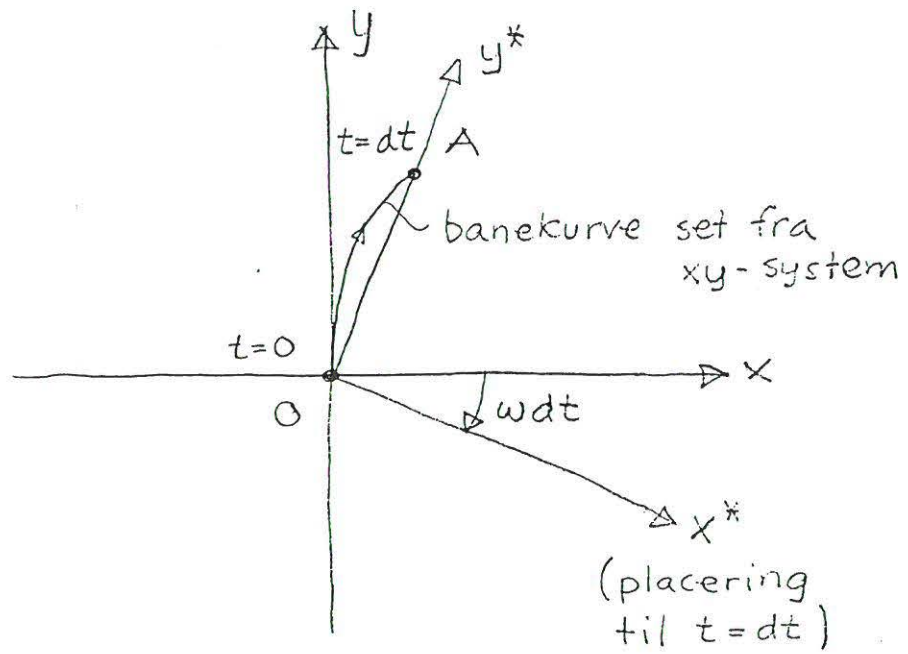
Befinder man sig på breddegraden  $\lambda$ , er det naturligt at beskrive en bevægelse i et koordinatsystem, hvor  $xy$ -planen er tangent til Jordens overflade, og  $x$ -aksen ligger langs breddegraden, se figur 6. I  $xy$ -systemet beskrives Jordens rotationsvektor og partiklens hastighed ved

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda) \quad (2)$$

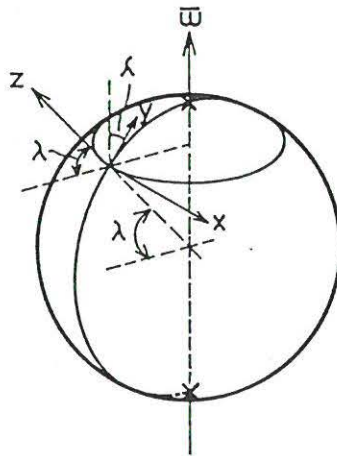
og

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (3)$$





Figur 5: Bevægelse beskrevet i det roterende  $x y$ -system.



Figur 6: Placering af roterende koordinatsystem.

Foregår bevægelsen kun i vandret plan, er  $v_z = 0$ , og man finder

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-v_y \omega \sin \lambda, v_x \omega \sin \lambda, -v_x \omega \cos \lambda)\end{aligned}\quad (4)$$

Den vandrette komponent af Coriolis' kraft på en partikel kan derfor skrives

$$\vec{F}_C = -2m\omega \sin \lambda (-v_y, v_x) = m2\omega \sin \lambda (-\hat{v}) \quad (5)$$

Indføres den såkaldte Coriolis' parameter

$$f_C = 2\omega \sin \lambda \quad (6)$$

kan Coriolis' kraft derfor skrives som

$$\boxed{\vec{F}_C = m f_C (-\hat{v}) = m f_C (v_y, -v_x)} \quad (7)$$

hvor  $\hat{v}$  er tværvektoren til  $\vec{v}$ . Som vist i næste afsnit spiller Coriolis' kraft en helt afgørende rolle for strømningerne i atmosfæren, selvom der er tale om en meget lille kraft. Det sidste indses ved at beregne værdien af Coriolis parameteren i Danmark, hvor  $\lambda = 56^\circ$ . Herved findes  $f_C = 2(2\pi)/(24 \cdot 3600) \sin 56^\circ = 1.21 \cdot 10^{-4}$  rad/sek.

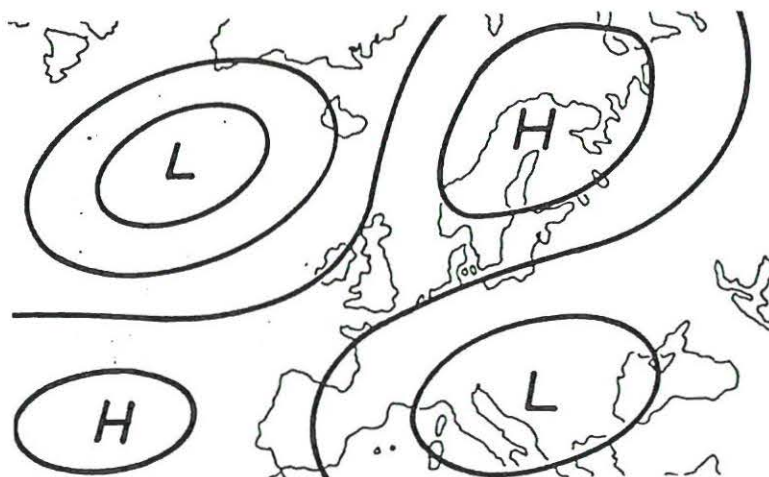
### 1.3 Vejrkort

Registrerer man lufttrykket i et stort antal punkter på jordoverfladen, kan man optegne kurver gennem punkterne med samme tryk. Disse kurver betegnes *isobarer*. Ved optegningen vil man ofte se, at isobarerne er lukkede kurver, der ligger omkring områder med henholdsvis højt og lavt tryk.

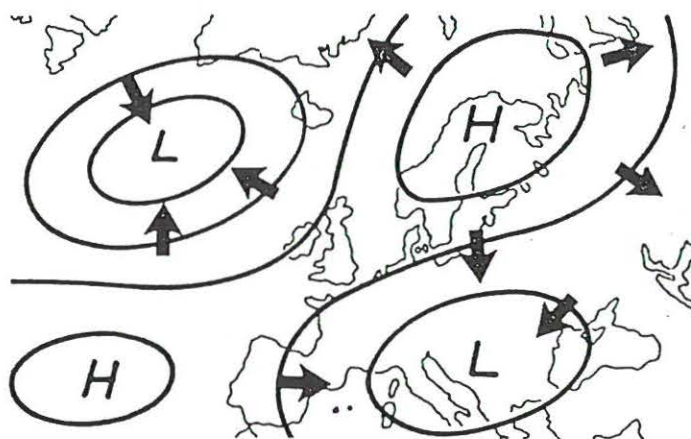
Et typisk forløb af isobarerne ved vintertide er skitseret på figur 7. Rent umiddelbart vil man forvente strømninger (vind), der forsøger at udjævne disse trykforskelle, dvs. væk fra højtryk og hen imod lavtryk. Se figur 8.

Det forsøger naturen også, men på grund af Coriolis' kraft afbøjes vinden mod højre på den nordlige halvkugle. I praksis bliver afbøjningen så stor, at vinden næsten blæser parallelt med isobarerne i stedet for vinkelret på disse. Se figur 9, hvor de aktuelt forekommende vindretninger er skitseret.

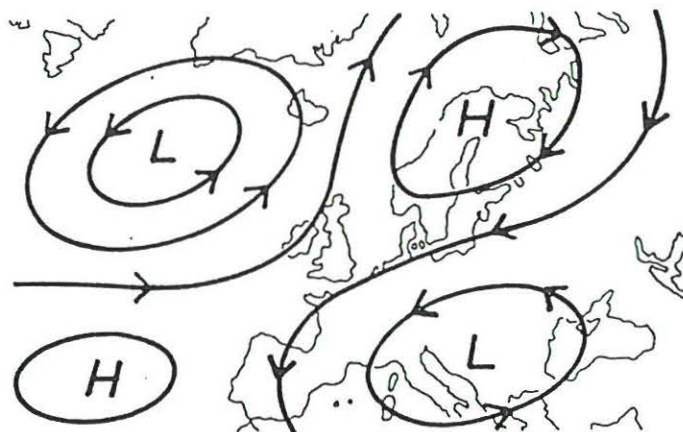
At det forholder sig sådan i virkeligheden, kan ses på vejrkort, hvor både isobarerne og de registrerede vindhastigheder optegnes. Vindens retning angives med en bjælke *mod* vindens retning, og dens styrke angives med faner på bjælken. En hel streg betyder 5 m/s, og en halv streg 2.5 m/s. Figur 10 er et eksempel på et vejrkort, der viser trykforhold og vindforhold over Danmark d. 01.10.77 kl. 01. Det ses, at vindhastighederne kun er uvæsentligt drejet i forhold til isobarerne. Bemærk endelig, at de største vindhastigheder forekommer dér, hvor isobarerne ligger tættest. Årsagen dertil forklares i næste afsnit.



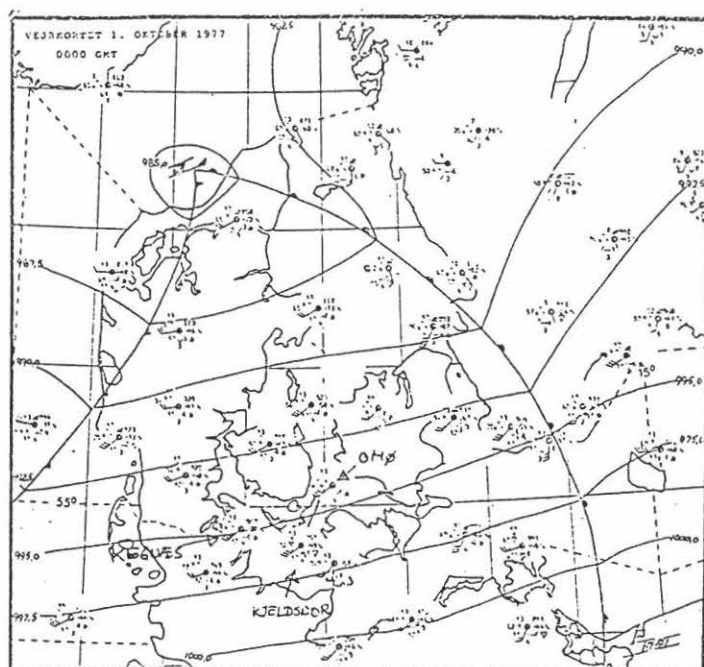
Figur 7: Vejrkort med isobarer.



Figur 8: Forventede vindretninger.



Figur 9: Skitse af aktuelt forekommende vindretninger.



Figur 10: Vejrkort over Danmark, d. 01.10.77 kl. 01.

## 1.4 Geostrofisk vind

Når vindforholdene i en stormsituation skal beskrives, ledes man naturligt til opdeling i et grænselag tæt på jordoverfladen, hvor der er væsentlige forskydningskræfter, og en strømning uden væsentlige forskydningskræfter ovenover.

Tykkelsen af grænselaget afhænger i al væsentlighed af overfladens ruhed samt af vindhastigheden udenfor grænselaget, se afsnit 1.5.

Da luft opfører sig som en newtonsk væske ved de hastigheder, man har i atmosfæren, kan metoderne fra den grundlæggende strømningslære benyttes ved opstilling af bevægelsesligninger.

De vandrette kræfter på en luftpartikel udgøres af trykkraften  $\vec{F}_P$ , Coriolis' kraft  $\vec{F}_C$  samt en forskydningskraft  $\vec{F}_T$ .

Trykgradienten  $\text{grad } p$  varierer meget langsomt geografisk set, hvorfor den med god tilnærmelse antages at være konstant indenfor det volumen,  $X$ , som luftpartiklen optager. Herved kan  $\vec{F}_P$  udtrykkes ved hjælp af gradient-teoremet:

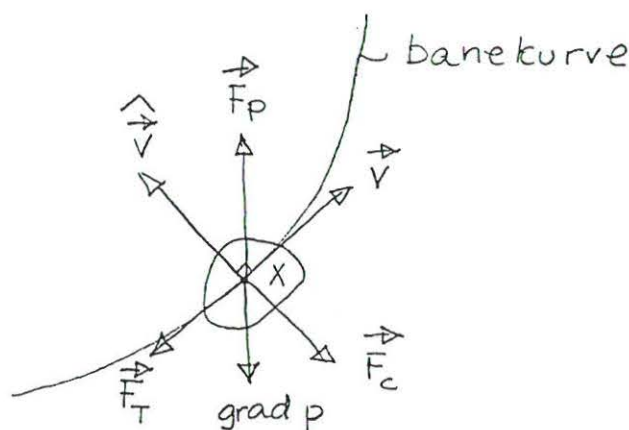
$$\vec{F}_P = \int_A -p d\vec{A} = \int_X (-\text{grad } p) dX = -\text{grad } p \cdot X \quad (8)$$

hvor  $A$  er partiklens overfladeareal, og  $d\vec{A}$  er den udadrettede fladenormal.

Coriolis' kraft findes af ligning (7). Forskydningskraften er rettet *mod* bevægelsesretningen, og man kan derfor udtrykke den som

$$\vec{F}_T = f(v)(-\vec{v}) \quad (9)$$

Funktionen  $f(v)$  kendes normalt ikke, men erfaringsmæssigt er forskydningskræfter små i forhold til trykkræfter.



Figur 11: Ydre kræfter på en luftpartikel.

Orienteringen af de forskellige kræfter er skitseret på figur 11. Herefter bliver Newtons 2. lov for luftpartiklen

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum \vec{F}_{ydre} \\
 \Leftrightarrow \rho X \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_P + \vec{F}_C + \vec{F}_T \\
 \Leftrightarrow \rho X \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad } p \cdot X - \rho X f_C \hat{v} - f(v) \vec{v}
 \end{aligned}$$

Efter division med  $X$  findes derpå følgende bevægelsesligning:

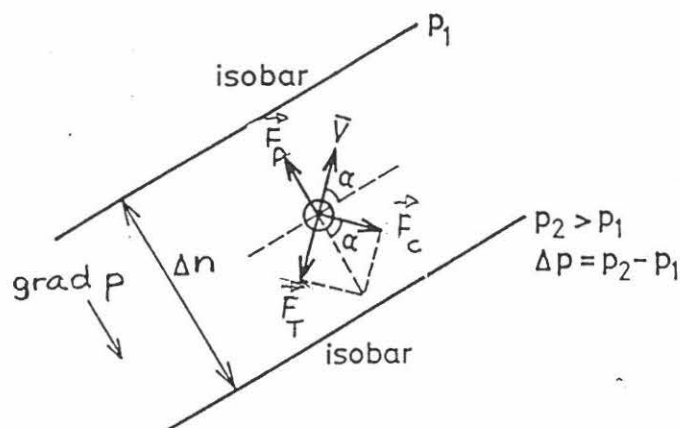
$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } p - \rho f_C \hat{v} - \frac{f(v)}{X} \vec{v}} \quad (10)$$

Da trykforholdene i atmosfæren som regel ændres meget langsomt i tiden, bliver en partikels fart,  $v$ , ret hurtigt konstant. Partiklens accelerationsvektor kan derfor umiddelbart bestemmes, hvis banekurven tilnærmes med en cirkel med radius  $R$ .

I mange tilfælde er banekurverne næsten retlinede, og i den situation bevæger partiklen sig derfor uden at blive accelereret, dvs.  $d\vec{v}/dt = \vec{0}$ . Se figur 12. I dette tilfælde bliver bevægelsesligningen, ligning (10), til

$$\vec{0} = -\text{grad } p - \rho f_C \hat{v} - \frac{f(v)}{X} \vec{v} \quad (11)$$

På grund af forskydningskraften,  $\vec{F}_T$ , bevirker opfyldelsen af kraftligevægt, at  $\vec{v}$  må danne vinklen  $\alpha$  med isobarerne, da  $\text{grad } p$  jo står vinkelret på disse. Der vil i afsnit 1.5.1 blive givet et udtryk til bestemmelse af vinklen tæt på jordoverfladen,  $\alpha_o$ . Af figur 12 fremgår det dog umiddelbart, at jo større forskydningskraften er, jo større bliver  $\alpha_o$ . I næsten alle tilfælde haves dog  $\alpha_o < 25^\circ$ .



Figur 12: Ydre kræfter på en luftpartikel ved retlinet banekurve.

Betragtes specielt forholdende udenfor grænselaget, hvor  $\vec{F}_T = \vec{0}$ , opnås kraftligevægt, når Coriolis' kraft og trykkraften er lige store og modsat rettede. Da trykkraftens retning er vinkelret på isobarerne, må partiklen bevæge sig parallelt med disse. Dette svarer til vektorligningen

$$-\text{grad } p = \rho f_C \hat{v} \quad (12)$$

hvoraf man størrelsesmæssigt finder

$$|\text{grad } p| = \rho f_C v \quad (13)$$

I tilfælde af retlinede isobarer kaldes vindhastigheden udenfor grænselaget for *geostrofisk vindhastighed*, og den betegnes  $U_G$ .

Trykgradienten kan findes af

$$|\text{grad } p| = \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| \approx \left| \frac{\Delta p}{\Delta n} \right| \quad (14)$$

hvor  $n$  er retningen vinkelret på isobarerne, og  $\Delta n$  er afstanden mellem disse.

Indsættes disse udtryk i ligning (13), findes følgende ligning til bestemmelse af *geostrofisk vindhastighed*

$$U_G = |\text{grad } p| \frac{1}{\rho f_C} \approx \left| \frac{\Delta p}{\Delta n} \right| \frac{1}{\rho 2\omega \sin \lambda} \quad (15)$$

I nogle tilfælde er krumningsradius i isobarerne (og dermed også i banekurven) mindre end 500-1000 km. Man bør derfor korrigere ovenstående beregning ved at medtage den nødvendige centripetalacceleration i ligning (10). Den resulterende vindhastighed kaldes i så fald for *gradient vindhastigheden*.



## 1.5 Vind i grænselag

I det følgende vil vi alene betragte stormsituationer, hvor luften er *fuldt opblandet*, dvs. der er ikke nogen tæthedsforskelle og dermed heller ingen lagdeling mellem kold og varm luft.

Målinger har vist, at strømmingen da kan beskrives som værende sammensat af en grænselagsstrømning tæt på jorden og en potentialstrømning udenfor, hvor vindhastigheden er lig med den geostrofiske vindhastighed,  $U_G$ .

På grundlag af målinger kan følgende fastslås om strømmingen i grænselaget:

1. Strømmingen i grænselaget er stærkt turbulent, idet turbulensen dannes ved luftens passage henover den ru overflade. Betegnes øjeblikkelige værdier af hastighed med  $v$ , tidsligt midlede hastigheder med  $U$  og fluktuationer med  $u$ , haves således

$$v(z, t) = U(z) + u(z, t) \quad (16)$$

$$U(z) = \frac{1}{T} \int_0^T v(z, t) dt \quad (17)$$

Hvor intet andet er angivet er midlingstiden  $T = 10$  minutter.

2. I praksis er de tidslige variationerne i  $U$  så langsomme, at man kan tillade sig at antage  $U$  uafhængig af tiden. Derimod afhænger  $U$  kraftigt med koten  $z$ .
3. Standardafvigelsen,  $\sigma_u$ , på tidsserier af fluktuationerne  $u(z, t)$  ændrer sig ikke mærkbart med  $z$ .
4. Kortvarige ændringer i  $u$  optræder ikke samtidigt langs en lodret linie. Dette er tilfældet med længerevarende ændringer.

Disse karakteristika kan ses på figur 13.

### 1.5.1 Vindprofil

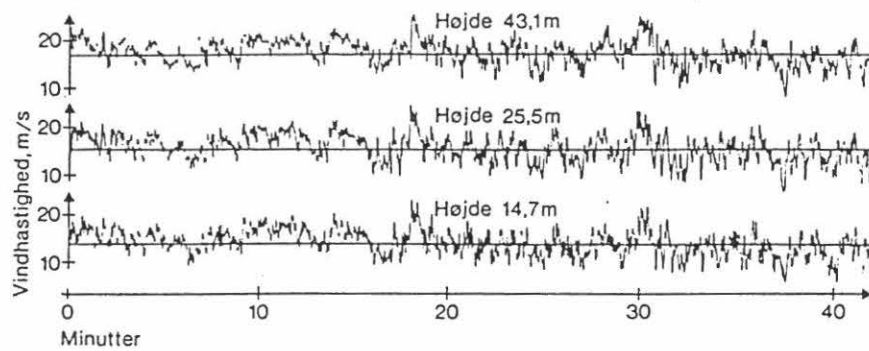
Målinger har vist at udtrykkene fra grænselagsteorien kan benyttes. Benyttes betegnelsen,  $\tau_o$ , for forskydningsspændingen mellem luft og overfladen, defineres den såkaldte *friktionshastigheden*,  $U_F$ , af

$$U_F = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (18)$$

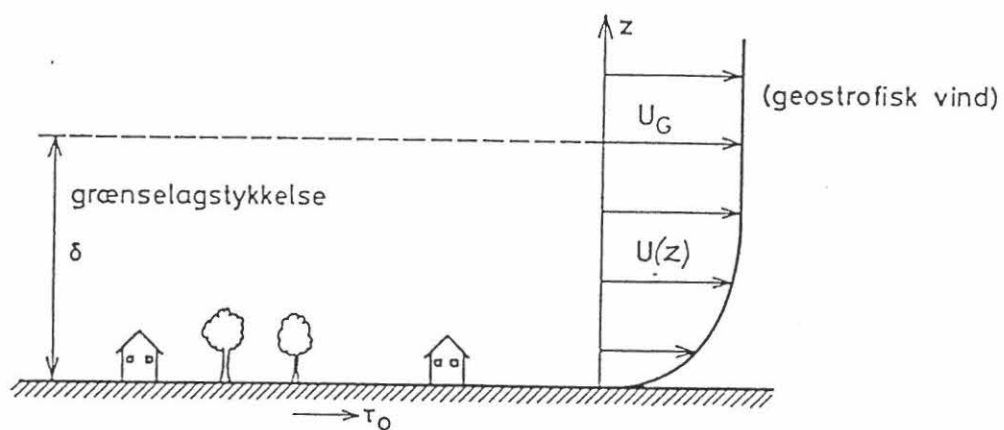
kan hastighedsprofilen i vertikal retning udtrykkes som

$$U(z) = \frac{1}{\kappa} U_F \ln \frac{z}{z_o} = 2.45 U_F \ln \frac{z}{z_o} \quad (19)$$

hvor  $\kappa = 0.4$  kaldes Kármáns universalkonstant,  $z$  er afstanden fra overfladen og  $z_o$  er ruhedsparameteren, der er et mål for størrelsen af overfladens ruhedselementer. Se



Figur 13: Vindhastigheder målt ved Stigsnæs i tre forskellige højder. (Dyrbye og Hansen, 1989).



Figur 14: Skitse af vindhastighedsprofil.



figur 14. Ruhedsparameteren for en given overflade kan findes ved at benytte ligning (19), idet målte værdier af  $U(z)$  plottes mod  $\ln z$ . Da  $U(z) = 0$  for  $z = z_o$ , kan  $z_o$  bestemmes ved skæringen mellem den rette linie gennem de målte hastigheder samt  $\ln z$ -aksen. Når  $z_o$  er bestemt, kan  $U_F$  efterfølgende findes af ligning (19).

Sammenholdes målte værdier af  $U_F$  og  $\sigma_u$  findes :

$$\sigma_u \approx 2.5 \cdot U_F \quad (20)$$

Da  $U_G$  kan bestemmes ud fra vejrkort, vil hastighedsprofilen være bestemt, hvis man kender en sammenhæng mellem  $U_G$  og  $U_F$ . Som vist i Davenport (1977), giver målinger følgende sammenhæng

$$U_F \approx U_G \cdot 0.16 \left( \frac{U_G}{f_C z_o} \right)^{-0.09} \quad (21)$$

hvor  $f_C$  er Coriolis' parameter. Indsættes dette udtryk for  $U_F$  i ligning (19) haves derfor

$$U(z) = 2.45 U_G \cdot 0.16 \left( \frac{U_G}{f_C z_o} \right)^{-0.09} \cdot \ln \frac{z}{z_o} \quad (22)$$

$U(z)$  kan således findes, når  $U_G$  og  $z_o$  er kendt.

Tilbage står blot bestemmelsen af grænselagstykkelsen  $\delta$ . Ifølge Simiu (1978) og Davenport (1977) findes denne af

$$\delta \approx 0.3 \cdot \frac{U_F}{f_C} \quad (23)$$

Hastighedsprofilen beskrives ofte tilnærmet med potensudtrykket

$$\frac{U(z)}{U_G} = \left( \frac{z}{z_G} \right)^\beta \quad (24)$$

Parameterne  $\beta$  og  $z_G$  fastlægges, så potensudtrykket tilnærmer logaritme-profilen bedst muligt nær overfladen. Det viser sig, at man finder  $z_G \approx \delta/10$ . I denne højde er  $U(z) \approx 0.90 \cdot U_G$ , og næsten al turbulens er i praksis døet ud her.

I tabel 1 er angivet karakteristiske værdier for  $z_o$ ,  $\beta$  og  $z_G$ .

Da grænselaget er meget tyndt i forhold til den horisontale udstrækning af strømningen kan man med god tilnærmelse antage, at  $grad p$  har samme størrelse og retning ned gennem grænselaget, dvs. er lig med  $grad p$  udenfor grænselaget.

Forskydningskræfterne på luftpartiklerne i grænselaget, bevirker som tidligere nævnt en dejning af  $\vec{v}$  i forhold til isobarerne, se figur 12. Da forskydningskræfterne

terræntype	$z_o$ (m)	$\beta$ (-)	$z_G$ (m)
hav m. store bølger	0.005 - 0.010	0.12	250
åbent marklandskab	0.010 - 0.10	0.16	300
skov / forstad	0.30 - 1.00	0.28	400
bymidte i storby	1.00 - 5.00	0.40	500

Tabel 1: *Ruhedsparameteren for forskellige terræntyper.*

vokser ned gennem grænselaget, drejes  $\vec{v}$  mere og mere *med* uret. Målinger viser, at  $\alpha_o$ , defineret som vinklen mellem  $U_G$  og  $U(10)$ , kan findes tilnærmet af

$$\sin \alpha_o = 1.7 \cdot \left( \frac{U_G}{f_C z_o} \right)^{-0.09} \quad (25)$$

For  $U_G = 30$  m/s findes følgende værdier for  $\alpha_o$ :

$$\alpha_o = \begin{cases} 25^\circ \text{ over land} & (z_o = 0.050 \text{ m}) \\ 20^\circ \text{ over vand} & (z_o = 0.005 \text{ m}) \end{cases} \quad (26)$$

### 1.5.2 Vindspektrum

Fluktuationerne  $u$  i vindhastigheden kan betragtes som en stokastisk variabel. Det er tidligere angivet, hvordan standardafvigelsen,  $\sigma_u$  og dermed variansen,  $\sigma_u^2$ , afhænger af terræntype og friktionshastigheden.

I det følgende skal beskrives, hvorledes variansen varierer med frekvensen  $f$ , dvs. i et varians- eller autospektrum for  $u$ , i det følgende betegnet  $S_{uu}(f)$ . Variansspektret for vindhastighed fortæller således, på hvilke frekvenser svingningerne i  $u$  ligger. Da man pr. definition har

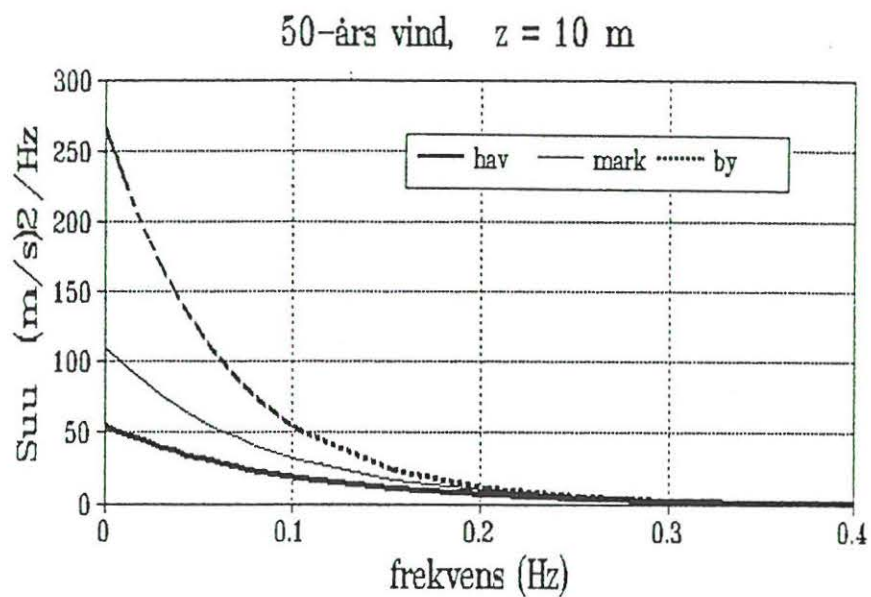
$$\sigma_u^2 = \int_0^\infty S_{uu}(f) df \quad (27)$$

og da  $\sigma_u \approx 2.5 U_F$  i den nederste del af grænselaget, skal arealet under variansspektret kun variere uvæsentligt med højden.

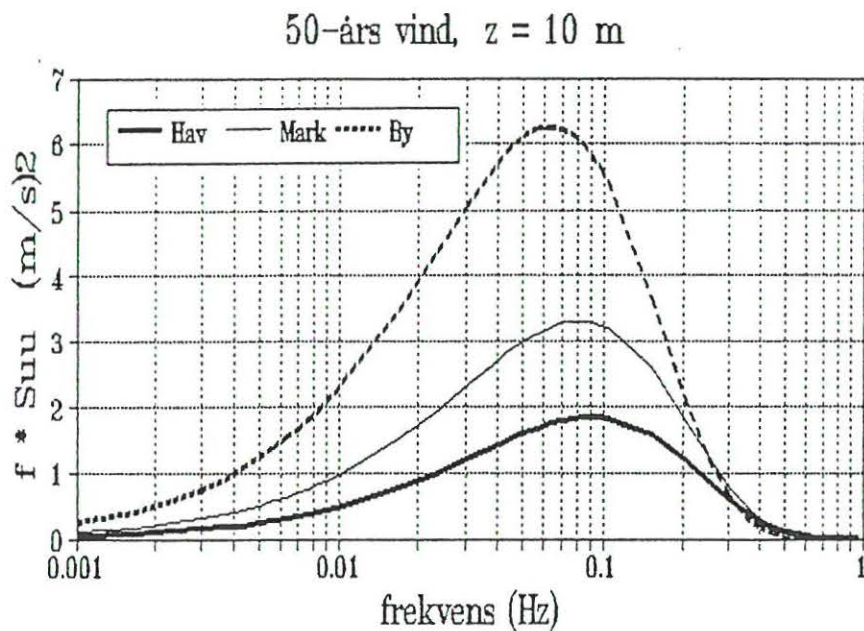
Fourier-analyseres en tidsserie af vindhastighed findes typisk resulteter, som vist i figur 15.

Disse spektre fortæller, at der findes en væsentlig varians på de lave frekvenser, hvilket ikke var tilfældet med variansspektre for overfladen i uregelmæssige bølger. For at få en bedre beskrivelse af variansens fordeling på de lave frekvenser, benytter man identiteten

$$\int_{f_1}^{f_2} S_{uu}(f) df = \int_{f_1}^{f_2} f S_{uu}(f) d(\ln f) \quad (28)$$



Figur 15: Variansspektre for vind. Lineær afbildning.



Figur 16: Variansspektre for vind. Logaritmisk afbildning.

Afbildes  $f S_{uu}$  mod  $\ln f$ , får man den ønskede bedre opløsning i området med de lave frekvenser, og variansen mellem de to frekvenser er stadigvæk lig med arealet under kurven. Se figur 16.

Ud fra teoretiske overvejelser og målinger har man fundet, at variansspektret for vind kan beskrives med

$$\boxed{\frac{f S_{uu}(f)}{U_F^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_u}{U_F} \right)^2 \cdot \frac{L f}{U(10)} \cdot \left( 1 + \frac{L f}{U(10)} \right)^{-5/3}} \quad (29)$$

hvor  $L$  er en længdeskala, der ifølge DS 410 skal findes som

$$L = \begin{cases} 20 z \frac{U(10)}{U(z)} & \text{hvis } z \leq 30 \text{ m} \\ 600 \frac{U(10)}{U(z)} & \text{hvis } z > 30 \text{ m} \end{cases} \quad (30)$$

### 1.5.3 Fordeling af geostrofisk vindhastighed, $U_G$

Som vist tidligere er vindforholdene ved jordoverfladen dikteret af den geostrofiske vindhastighed,  $U_G$ . Da  $U_G$  igen bestemmes af de lavtryk, der passerer hen over Danmark, kan man finde langtidsfordelingen af  $U_G$  ved at analysere vejrkort fra en længere årrække. Dette er foretaget i "Vindatlas for Danmark" (1980). Det viser sig, at sandsynlighedsfordelingen for  $U_G$  er en såkaldt Weibull-fordeling, og endvidere er der kun uvæsentlige afvigelser i sandsynlighedsfordelingen af  $U_G$  i de forskellige dele af landet.

Ved dimensionering af bygningskonstruktioner har man her i landet valgt at benytte den såkaldte 50-års hændelse, dvs. en hændelse der i gennemsnit optræder eller overskrides for hver 50 år.

Man kan derfor finde de dertil svarende vindhastigheder, hvis man kender 50-års værdien for geostrofisk vind, i det følgende betegnet  $U_G^{50}$ . Derefter findes i grænselaget de tilhørende værdier af  $U(10)^{50}$ , som vist tidligere.

Her i Danmark er  $U_G^{50} \approx 55$  m/s. For de tre terræntyper omtalt i DS 410 findes derefter de i tabel 2 viste værdier i 50-års hændelsen.  $U_F$  er fundet af ligning (21) og  $U(10)^{50}$  er fundet af ligning (19), dvs.

$$U(z)^{50} = 2.45 U_F^{50} \ln \frac{z}{z_0} \quad (31)$$

I tabel 2 er også angivet den såkaldte *terrænparameter*  $k_t$  som benyttes i DS 410's udtryk for 50-års værdien af  $U(10)$ , nemlig

$$U(z)^{50} = U(10)_{z_0=0.05}^{50} \cdot k_t \cdot \ln \frac{z}{z_0} \quad (32)$$

I DS 410 kaldes  $U(10)_{z_0=0.05}^{50}$  for *basisvindhastigheden*. Sammenlignes ligninger (31) og (32), ses umiddelbart, at

$$k_t = 2.45 \cdot \frac{U_F^{50}}{U(10)_{z_0=0.05}^{50}} \quad (33)$$



terræntype	$z_o$ m	$U_F^{50}$ m/s	$U(10)^{50}$ m/s	$k_t$ (-)
hav	0.01	1.8	31	0.17
mark	0.05	2.1	27	0.19
byområde	0.3	2.5	21	0.22

Tabel 2: 50-års hastigheder i Danmark for forskellige terræntyper.

Hvorfor DS 410 har indført denne parameter istedet for at opgive værdierne for  $U_F^{50}$  er lidt af en gåde, og det er ihvertfald med til at sløre den fysiske indsigt i problemerne.

#### 1.5.4 Fordeling af vindhastighed, $v$

Efter fastlæggelsen af 50-års hændelse for geostrofisk vind og  $U(10)^{50}$  kan man derefter fastlægge forventningsværdien af den maksimale værdi af vindhastigheden  $v(z, t) = U(z) + u(z, t)$  i et givet tidsrum. Denne værdi betegnes  $E(v(z)^{50}_{max})$ , og den viser sig at være afhængig af det tidsrum  $v(t)$  observeres i.

Målinger viser, at fluktuationen  $u(t)$  med meget fin tilnærmelse er *normalfordelt*. Man kan derfor benytte allerede opstillede udtryk for forventningsværdien,  $E(v(z)^{50}_{max})$ . I Dyrbye og Hansen (1989) er opgivet

$$E(v(z)^{50}_{max}) = U(z)^{50} + k_p \cdot \sigma_u \quad (34)$$

hvor den såkaldte *peak-faktor*  $k_p$  findes af

$$k_p = \sqrt{2 \ln(T_{obs} \cdot f_{02})} + \frac{0.58}{\sqrt{2 \ln(T_{obs} \cdot f_{02})}} \quad (35)$$

og  $f_{02}$  er frekvensen af  $u(z, t)$ 's nul-nedkrydsninger. Ligesom i bølgehydraulikken kan denne størrelse findes af

$$f_{02} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (36)$$

hvor  $m_0$  og  $m_2$  er spektrale momenter defineret ved

$$m_n = \int_0^\infty f^n \cdot S_{uu}(f) df \quad (37)$$

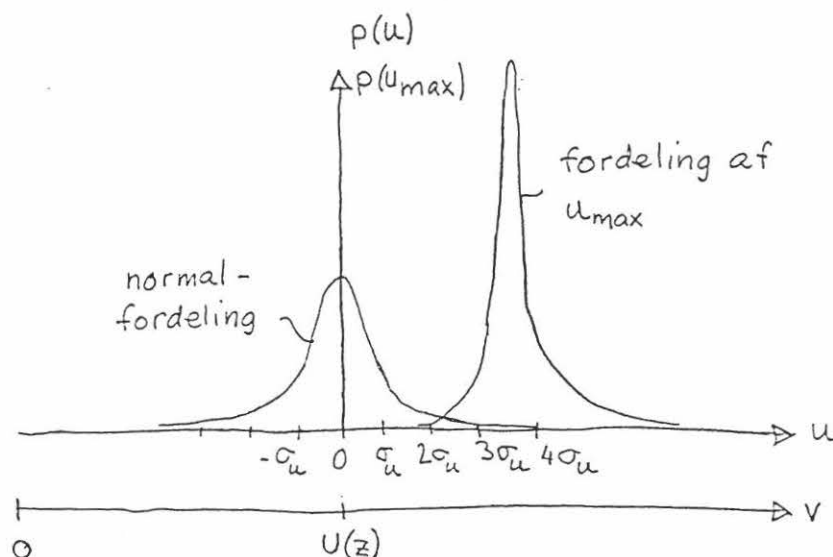
På figur 17 er skitseret sandsynlighedstæthedsfunktionerne for henholdsvis  $u$  og  $v_{max}$ .

I naturligt forekommende vind haves  $f_{02} \approx 0.1$  Hz, og benyttes  $T_{obs} = 10$  minutter, findes derfor

$$k_p = \sqrt{2 \ln(600 \cdot 0.1)} + \frac{0.58}{\sqrt{2 \ln(600 \cdot 0.1)}} \approx 3.1 \quad (38)$$

midlingstid	1 time	10 min	1 min	15 sek	5 sek	3 sek
omregningsfaktor	0.94	1.00	1.11	1.19	1.24	1.25

Tabel 3: Omregningsfaktorer mellem 50-års værdier af hastigheder i 10 m's højde midlet over forskellige tidsrum,  $z_o = 0.01$  m.



Figur 17: Sandsynlighedstæthedsfunktioner for vind.

Herefter findes for  $z_o = 0.01$  m, dvs. for terræntypen 'hav',

$$\begin{aligned}
 E(v(10)_{max}^{50}) &= U(10)^{50} + 3.1 \cdot \sigma_u \\
 &= U(10)^{50} + 3.1 \cdot (2.5 U_F^{50}) \\
 &= 31 + 3.1 \cdot 2.5 \cdot 1.8 = 45 \text{ m/s}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Da midling over et tidsrum altid vil bevirke, at middelværdien bliver lavere end maksimalværdien, er der i tabel 3 angivet sammenhængen mellem værdierne for hastigheder midlet over forskellige tidsrum. Tabellen er taget fra DS 449, der omhandler belastninger på offshore konstruktioner, og den gælder derfor kun for  $z_o = 0.01$  m.

Udgangspunktet er  $U(10)^{50}$ , dvs. 50-årsværdien af hastighed i 10 m's højde midlet over 10 minutter. I DS 410 betegnes hastigheden midlet over 3 sek for 'korttidsmiddelværdien'. Det ses, at forholdet mellem forventningsværdi af  $v_{max}$  og korttidsmiddel for  $z_o = 0.01$  m er  $45/(31 \cdot 1.25) = 1.16$ .

## 2 Vindbelastning

Når virkningen af vindbelastning på en konstruktion skal fastlægges, skelner man normalt mellem stive konstruktioner og svingningsfølsomme konstruktioner. Som

antydnet i de næste afsnit, er beregningen at vindlast ret enkel for stive konstruktioner, hvorimod det er ret indviklet at beregne vindlast på svingningsfølsomme konstruktioner.

I begge tilfælde skal man bemærke, at de højsfrekvente hastighedsfluktuationer ikke forekommer samtidigt over store områder. Dette skyldes simpelthen, at de højsfrekvente fluktuationer skabes af små hvirvler. Man vil derfor normalt overvurdere belastningen, hvis man regner lasten ud på grundlag af  $E(v_{max})$  overalt på konstruktionen.

## 2.1 Statisk vindlast i vindens retning

I tilfælde af en stiv konstruktion, er det tilladeligt at antage vindlasten for en statisk virkende belastning. Vindlasten,  $F$ , på arealet,  $A$ , beregnes ud fra

$$F = c \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad (40)$$

hvor  $c$  er en formfaktor, der hovedsagelig afhænger af konstruktionens form, og  $\rho$  er luftens densitet.

Som nævnt tidligere optræder de store værdier af øjeblikkelige vindhastighed normalt ikke samtidigt over hele konstruktionen. I DS 410 angives, at man normalt skal benytte 'korttidsmiddelværdi' af vindhastigheden, dvs. hastigheder midlet over 3 sekunder, og angiver følgende formel til bestemmelse heraf:

$$v = 27 \cdot k_t \left( \ln \frac{z}{z_o} + 1.3 \right) \quad (41)$$

Det er underforstået, at man betragter 50-års hændelsen, og det er i øvrigt noget svært at gennemskue formlen. I tilfælde af terræntypen 'hav',  $z_o = 0.01$  m, findes for  $z = 10$  m:

$$v(10) = 27 \cdot 0.17 \left( \ln \frac{10}{0.01} + 1.3 \right) = 38 \text{ m/s.} \quad (42)$$

Benyttes derimod ligning (19) med  $U_F^{50} = 1.8$  m/s,  $z_o = 0.01$  m og fra tabel 3 omregningsfaktoren 1.25 mellem 10 min. middel og 3 sek. middel, findes

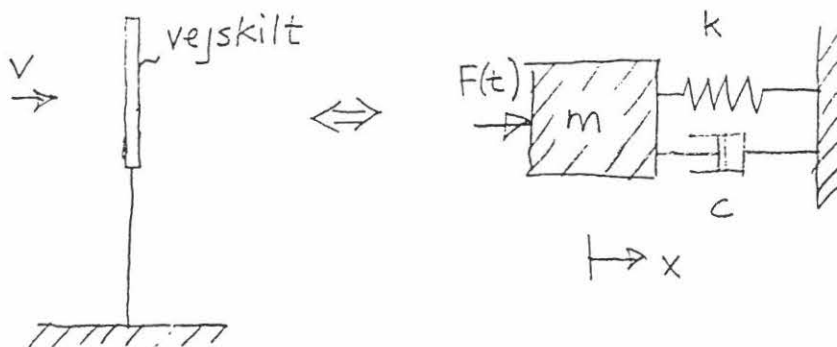
$$v(10) = 1.25 \cdot U(10)^{50} = 1.25 \cdot 2.45 \cdot 1.8 \ln \frac{10}{0.01} = 38 \text{ m/s} \quad (43)$$

Resultatet er det samme, men gennemskueligheden er større i sidstnævnte beregning.

## 2.2 Dynamisk vindlast i vindens retning

Betragtes en svingningsfølsom konstruktion, er man nødt til at betragte vindlasten som en dynamisk belastning. Vindlasten,  $F(t)$ , på arealet,  $A$ , kan for slanke konstruktioner beregnes af Morisons formel, hvor inertikraften er negligeret, dvs. af

$$F(t) = c_D \cdot \frac{1}{2} \rho (v(t) - \dot{x})^2 A \quad (44)$$



Figur 18: Dynamisk model af vejskilt, 1 frihedsgrad.

hvor  $x$  er konstruktionens udbøjning,  $\dot{x}$  er konstruktionens hastighed,  $c_D$  er formfaktoren og  $\rho$  er luftens densitet.

Den simpleste dynamiske model man kan opstille for en svingningsfølsom konstruktion er vist i figur 18.

Newtons 2. lov for dette system lyder

$$m \ddot{x} = \sum F_{ydre} = -kx - c\dot{x} + F(t) \quad (45)$$

hvor  $x$  er fjederstivheden og  $c$  er dæmpningskonstanten. Denne ligning omskrives normalt til

$$m \ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (46)$$

Udtrykket for  $F(t)$  vil nu blive omskrevet, inden det indsættes i bevægelsesligningen. Da  $v(t) = U + u(t)$ , kan  $F(t)$  omskrives således:

$$\begin{aligned} F(t) &= c_D \frac{1}{2} \rho (v(t) - \dot{x})^2 A \\ &= c_D \frac{1}{2} \rho (U + u(t) - \dot{x})^2 A \\ &\approx c_D \frac{1}{2} \rho (U^2 + 2Uu(t) - 2U\dot{x}) A \\ &= c_D A \frac{1}{2} \rho U^2 + c_D A \rho U u(t) - c_D A \rho U \dot{x} \\ &= \bar{F} + c_D A \rho U u(t) - c_D A \rho U \dot{x} \end{aligned} \quad (47)$$

hvor  $\bar{F} = c_D A \frac{1}{2} \rho U^2$  således er middelværdien af belastningen midlet over 10 minutter. Indsættes ligning (47) i ligning (46) findes

$$m \ddot{x} + c\dot{x} + kx = \bar{F} + c_D A \rho U u(t) - c_D A \rho U \dot{x} \quad (48)$$



I kraften findes et led proportionalt med  $\dot{x}$ . Flyttes dette led over på venstresiden af ligningen, kan det formelt opfattes som et dæmpningsled, idet man finder

$$m \ddot{x} + (c + c_D A \rho U) \dot{x} + k x = \bar{F} + c_D A \rho U u(t) \quad (49)$$

Det ekstra dæmpningsbidrag i bevægelsesligningen kaldes for *aerodynamisk dæmpning*, da det afhænger af  $U$ . I praksis er der tale om et vigtigt led, da øget dæmpning giver mindre bevægelser.

Tidsmidles alle led i ligning (49) findes

$$k \bar{x} = \bar{F} \quad (50)$$

da  $\bar{u} = 0$ , og man nødvendigvis må have  $\bar{\ddot{x}} = \bar{\dot{x}} = 0$ , hvis konstruktionen skal forblive på samme sted.

Konstruktionen står således og svinger omkring middelpositionen  $\bar{x}$ . Disse svingninger beskrives nemmest ved at indføre koordinaten  $y$  som afvigelsen fra middelpositionen, dvs.

$$x = \bar{x} + y \quad (51)$$

Indsættes dette udtryk i ligning (49) og benyttes definitionen

$$F_y(t) = c_D A \rho U u(t) \quad (52)$$

findes

$$m \ddot{y} + (c + c_D A \rho U) \dot{y} + k y = F_y(t) \quad (53)$$

Da der er lineær sammenhæng mellem  $u$  og  $F_y(t)$  vides endvidere, at

$$\sigma_F = c_D A \rho U \cdot \sigma_u \quad (54)$$

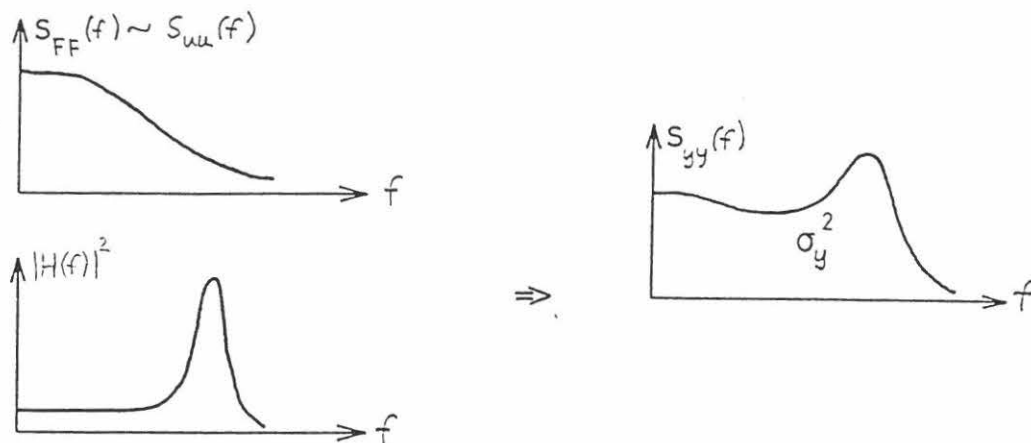
samt, at variansspektret for  $F_y$  kan beregnes af variansspektret for  $u$  efter udtrykket

$$S_{FF}(f) = (c_D A \rho U)^2 \cdot S_{uu}(f) \quad (55)$$

Ved denne simple omregning fra vindspektrum til belastningsspektrum er det imidlertid forudsat, at skiltet er påvirket af den samme vindhastighed over hele arealet. Hastighedsfluktuationerne skyldes hvirvler, hvis størrelse aftager, når frekvensen af fluktuationen øges. Fra og med en vis frekvens bliver hvirvlernes størrelse mindre end udstrækningen af  $A$ , og de tilhørende vindhastigheder optræder derfor ikke samtidigt over hele arealet. Belastningen på skiltet vil derfor blive overvurderet ved at benytte ligning (55). I praksis indføres en frekvensafhængig reduktionsfaktor, se f. eks. Dyrbye (1989).

Ligning (53) er en bevægelsesligning, der behandles grundigt i svingningsteorien, og nedenfor er givet nogle få resultater herfra. Antages kraften at variere som

$$F_y(t) = a_F \cdot \sin(2\pi f t) \quad (56)$$



Figur 19: Sammenhæng mellem variansspektre for kraft og flytning.

vides, at bevægelsen af legemet bliver

$$y(t) = a_y \cdot \sin(2\pi f + \varphi(f)) \quad (57)$$

hvor  $\varphi(f)$  er en i denne sammenhæng uinteressant fasedrejning. Forholdet mellem amplituderne kaldes for systemets *frekvensrespons-funktion*. Den betegnes normalt  $|H(f)|$ , og fra svingningsteorien vides, at

$$|H(f)|^2 = \left( \frac{a_y(f)}{a_F(f)} \right)^2 = \frac{1}{[k - m(2\pi f)^2]^2 + [(c + c_D A \rho U)(2\pi f)]^2} \quad (58)$$

Da der er tale om et lineært system, vides endelig, at variansspektret for  $y$  findes af

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{FF}(f) \quad (59)$$

og indsættes heri ligning (55) findes endelig

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot (c_D A \rho U)^2 \cdot S_{uu}(f) \quad (60)$$

På denne måde kan variansspektret for bevægelsen omkring middelpositionen beregnes direkte, og dermed kan også variansen  $\sigma_y^2$  findes som arealet under  $S_{yy}(f)$ . Herefter kan den maksimale udbøjning,  $y_{max}$ , findes af

$$y_{max} = k_p \cdot \sigma_y \quad (61)$$

Peak-faktoren  $k_p$  afhænger af observationsperioden  $T_{obs}$ , nulnedkrydsningfrekvensen  $f_{02}$  for  $y$ -tidsserien samt af sandsynlighedsfordelingen for  $y$ . Som regel går man dog ikke helt galt i byen, hvis man benytter  $k_p \approx 3.1$  (se estimeringen af maximal vindhastighed).

Herefter kan forventningsværdien af den totale flytning findes af

$$x_{max} = \bar{x} + 3.1 \cdot \sigma_y \quad (62)$$

Det ses af figur 19, at størrelsen af  $\sigma_y$  afhænger af udseendet af  $|H(f)|^2$ , og frekvensrespons-funktionen afhænger igen af konstruktionens udforming via parametrene  $m$ ,  $k$  og  $c$ .

I praksis gælder det derfor om at udforme sin konstruktion således, at toppunktet for frekvensrespons-funktionen ligger ved en frekvens, hvor  $S_{uu}(f)$  og dermed også  $S_{FF}(f)$  er ubetydelig.

### 3 Litteratur

Meriam, J. L. and Kraige, L. G. (1987), *Dynamics, Engineering Mechanics, Vol. 2*, John Wiley and Sons.

Davenport, A. G. (1977), *Wind Structure and Wind Climate, Safety of Structures under Dynamic Loading, Vol. 1*, Trondheim.

Simiu, E. and Scanlan, R. H. (1978), *Wind Effects on Structures*.

Dyrbye, C. og Hansen, S. O. (1989), *Vindlast på bærende konstruktioner*, SBI-anvisning nr. 158, Statens byggeforskningsinstitut.

Petersen, E. L., Troen, I. og Frandsen, S. E. (1980), *Vindatlas for Danmark*, Risø.

DS 410 (1982), *Last på konstruktioner*, Teknisk Forlag.

DS 449 (1983), *Pile-supported Offshore Steel Structures*, Teknisk Forlag.